

Colle du 08/01 - Sujet 1
Matrices et analyse asymptotique

Question de cours.

1. Enoncer le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre 5 en 0.
2. Démontrer de la formule de la trace du produit.

Exercice 1. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 1 \\ y \neq 1}} \frac{y^y - y}{1 - y + \ln(y)}.$$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble suivant (appelé le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) :

$$\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = MA\}.$$

Colle du 08/01 - Sujet 2
Matrices et analyse asymptotique

Question de cours.

1. Enoncer le développement limité de $x \mapsto \tan(x)$ à l'ordre 5 en 0.
2. Démontrer la formule de Taylor-Young.

Exercice 1. Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^n pour tout $n \geq 0$.
2. Justifier que M est inversible.
3. Montrer que la formule obtenue à la question 1 est encore vraie pour $n = -1$.

Exercice 2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{1 - \tan\left(\frac{x\pi}{4}\right)}$.

Colle du 08/01 - Sujet 3
Matrices et analyse asymptotique

Question de cours.

1. Enoncer le développement limité de $x \mapsto \cos(x)$ à l'ordre 5 en 0.
2. Démontrer le théorème de primitivation du développement limité.

Exercice 1. Déterminer les puissances de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. La matrice A est-elle inversible ?

Exercice 2. La fonction suivante f admet-elle une asymptote en $+\infty$? Si oui donner localement la position de la courbe par rapport à son asymptote.

$$f : x \mapsto (x^2 - 1) \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$